Tema 10: Teorema de Hahn-Banach

14 y 17 de junio de 2010

1. Versión analítica
   - Enunciado del teorema
   - Dual topológico
   - Teoremas de extensión
   - Duales de subespacios y cocientes
   - Límites de Banach

2. Versión geométrica
   - Separación de convexos
   - Teoremas Generales de Separación
   - Hiperplanos de soporte
   - Separación fuerte
   - La integral de Pettis

Enunciado del Teorema

Teorema de Hahn-Banach, versión analítica

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ funcional sublineal:

$$\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X)$$

$$\nu(r\,x) = r\,\nu(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$$

M subespacio vectorial de X, $g : M \to \mathbb{K}$ lineal, verificando:

$$\operatorname{Re}\, g(m) \leqslant \nu(m) \ \ \forall m \in M$$

Entonces existe $f : X \to \mathbb{K}$ lineal

que extiende a g:

$$f(m) = g(m) \ \ \forall m \in M$$

y verifica:

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant \nu(x) \ \ \forall x \in X$$

Si ν es una seminorma, se tiene de hecho

$$|f(x)| \leqslant \nu(x) \ \ \forall x \in X$$

Dual topológico de un EVT

Definición

X EVT. Dual topológico de X:

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ lineal y continuo } \}$$

$$¿X^* \neq \{0\}?$$

$¿X^*$ separa los puntos de X?: $¿\ x \in X \setminus \{0\} \implies \exists\, f \in X^* : f(x) \neq 0$?

Construcción de funcionales lineales

X espacio vectorial, $X \supset U$ absorbente y convexo, $x_0 \in X \setminus U$

Existe $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in U\,, \quad \operatorname{Re} f(x_0) \geqslant 1$$

Abundancia de funcionales lineales continuos

X EVT

- $X^* \neq \{0\}$ si, y sólo si, X contiene un entorno de cero convexo $U \neq X$
- X^* separa puntos si, y sólo si, la intersección de los entornos de cero convexos en X es $\{0\}$
- X ELC separado $\implies$ X^* separa puntos

Extensión de funcionales lineales continuos

Teorema de extensión en ELC

X ELC, M subespacio vectorial de X, $g \in M^*$:

$$\exists\ f \in X^* : f(m) = g(m) \quad \forall m \in M$$

Extensión equinórmica en espacios normados

X espacio normado, M subespacio vectorial de X, $g \in M^*$:

$$\exists\ f \in X^* : f(m) = g(m) \quad \forall m \in M \qquad \text{y} \qquad \|f\| = \|g\|$$

Una consecuencia interesante

En un ELC separado, todo subespacio de dimensión finita está complementado

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^\circ = \big\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \big\}$

Como espacios vectoriales: $M^* \equiv X^*/M^\circ$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Dual de un cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X. Como espacios vectoriales:

$$(X/M)^* \equiv M^\circ$$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Caracterización dual del cierre de un subespacio

X ELC, M subespacio de X

$$\overline{M} = \{ x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in M^\circ \} = \bigcap_{f \in M^\circ} \ker f$$

En particular: $\overline{M} = X \iff M^\circ = \{0\}$

Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $(y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1,\ h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $\forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ $\forall x \in l_\infty$

(3) $f\left(x^{(k)}\right) = f(x)$ $\forall x \in l_\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$, donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Como consecuencia se tiene que $f \in l_\infty^*$, $\|f\| = 1$ y

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) \leqslant f(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x(n) \quad \forall x \in l_\infty$$

En particular $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $\forall y \in c$. Se dice que f es un límite de Banach

Medias invariantes

$(\Lambda, +)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda,\ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda + \gamma) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$ con $\|f\| = 1$

Medidas finitamente aditivas

Existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ que verifica las siguientes condiciones:

(a) Es finitamente aditiva:

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(b) Es invariante por traslaciones:

$$A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \implies \mu(A + x) = \mu(A)$$

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \gamma$ también separa A y B

Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad, $B = \{0\}$,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \ \alpha_N > 0 \right\}$$

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de c_{00} pero

$$f : c_{00} \to \mathbb{R} \ \text{lineal}, \ f \neq 0 \implies f(A) = \mathbb{R}$$

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Separación en EVT

X EVT, A y B subconjuntos convexos.

Supongamos que $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, que $B \neq \emptyset$ y que $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$.

Entonces existen $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

De hecho, se tiene

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \quad \forall x \in \operatorname{int} A$$

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max \{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Existe un hiperplano cerrado $H \subset X$ tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$

Separación en dimensión finita

A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de $\mathbb{K}^N$.

Existen $f : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Equivalentemente, existen $u \in \mathbb{K}^N \setminus \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} \big(a \,\big|\, u\big) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} \big(b \,\big|\, u\big) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que A es cerrado y B es compacto.

Existen $f \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

X espacio normado, A, B subconjuntos no vacíos, convexos.

Supongamos que A y B están a distancia positiva: $d(A, B) = \rho > 0$.

Entonces, existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma < \gamma + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Integral de Pettis

Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, X ELC separado, $\varphi : \Omega \to X$.

- φ débilmente medible $\iff$ $f \circ \varphi$ medible $\forall f \in X^*$
- φ débilmente integrable $\iff$ $f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $\forall f \in X^*$
- φ es integrable en el sentido de Pettis cuando es débilmente integrable y existe $x \in X$ tal que

$$f(x) = \int_\Omega (f \circ \varphi)\, d\mu \quad \forall f \in X^*$$

El vector x es único, se le llama integral de Pettis de φ con respecto a μ:

$$x = \int_\Omega \varphi\, d\mu$$

Integral de Pettis

Existencia de la integral

X ELC separado y completo

K espacio topológico compacto de Hausdorff

μ medida de Borel positiva y finita en K

Toda función continua de K en X es integrable en el sentido de Pettis.

Suponiendo, sin perder generalidad, $\mu(K) = 1$, para toda función continua $\varphi : K \to X$ se tiene:

$$\int_K \varphi \, d\mu \in \overline{\operatorname{co} \varphi(K)}$$